21/03/14.

<u>Στόχος</u>: Θέλουμε να βρούμε ένα κριτήριο, ώστε να μπορούμε να αναγνωρίσουμε <u>τοπικά</u>, αν μια δοσμένη $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη, με $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, είναι ολ/μη:

[→ Αυτό θα μας βοηθήσει ώστε να ορίσουμε ολ/τα $\int_U f$ για $U \subset \mathbb{R}^n$ που δεν είναι ορθογώνια π.χ. μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$]

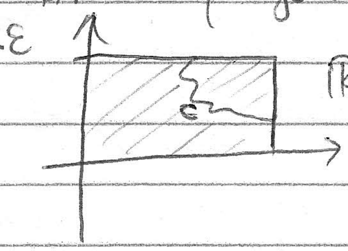
Αυτός ο στόχος επιτυγχάνεται με το <u>κριτήριο Lebesgue</u>.

Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολ/μη $\Leftrightarrow$ f συνεχής <u>σχεδόν παντού</u>.

Για να καταλάβουμε τι σημαίνει "σχεδόν παντού" πρέπει να μετρήσουμε το "~~μέ~~μέγεθος" ενός υποσυνόλου, κυρίως, εδώ, πότε αυτό είναι "πάρα... πολύ μικρό". ("αμελητέα")

<u>Ορισμός</u>: Ένα $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει:

(α) (n-διάστατο) <u>μηδενικό μέτρο</u>, αν $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists$ αριθμήσιμο πλήθος από κλειστά ορθογώνια $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A$ και $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$



$\mathbb{R}^2$

$f: A \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in C \\ 0, & \bar{x} \in A \setminus C \end{cases}$

(β) (n-διάστατο) <u>μηδενικό περιεχόμενο</u> αν $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists$ πεπερασμένο πλήθος από κλ. ορθ. δηλ. $(U_i)_{i=1,\dots,k}$: $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \supset A$ και $\sum_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon$

<u>Πρόταση</u> (4.1.5) (α): Οι ορισμοί του μηδενικού μέτρου και περιεχομένου δεν αλλάζουν αν αντί για κλειστά ορθογώνια θεωρήσουμε ανοικτά.

(β) Κάθε υποσύνολο ενός συνόλου μηδενικού μέτρου (ή περιεχομένου) έχει μηδενικό μέτρο (ή περιεχόμενο).

(γ) Κάθε πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού περιεχομένου και κάθε αριθμήσιμη ένωση συνόλων μηδ. μέτρου έχουν μηδενικό περιεχόμενο ή μέτρο αντίστοιχα.

(δ) Κάθε σύνολο μηδενικού περιεχομένου έχει μηδενικό μέτρο.
(ε) Κάθε συμπαγές σύνολο μηδ. μέτρου έχει και μηδ. περιεχόμενο.
[(δ)+(ε) ⟹ $B \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε B μηδ. μέτρο ⟺ B: μηδ. περιεχόμενο
(στ) Κάθε κλειστό ορθογώνιο έχει μη μηδενικό μέτρο και μη μηδενικό περιεχόμενο]
(ζ) Κάθε σύνολο μηδενικού περιεχομένου είναι φραγμένο.

Σκιαγράφηση απόδ.: (α) Κάθε κλ. ορθ. περιέχεται σε ένα ανοικτό ορθ. με διπλάσιο περιεχόμενο (π.χ. $U = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset V =$
$= \left(a_1 - \frac{(\sqrt{2}-1)(b_1-a_1)}{2}, b_1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(b_1-a_1)}{2}\right) \times \ldots \times (a_n - \ldots, b_n - \ldots)$
με $v(V) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{2}(b_i - a_i) = 2v(U)$

Έστω ότι $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει μηδ. περιεχ. ή μέτρο. Τότε $\exists U_i : \bigcup U_i \supset A$ (μέτρο)
και $\sum_i v(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ ⟹ ∃ ανοικτά V_i με $\bigcup_i V_i \supset A$ και $\sum_i v(V_i) < \varepsilon$

Από την άλλη, αν ισχύουν οι ορισμοί με ανοικτά αντί για κλειστά τότε θα ισχύουν και για τα κλειστά σύνολα $U_i = \overline{V_i} \supset V_i$
με $v(V_i) = v(U_i)$

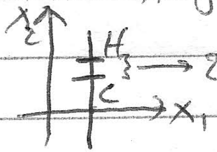
Ορισμός: Λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει 'σχεδόν παντού' σε ένα $A \subset \mathbb{R}^n$, αν ισχύει σε κάθε σημείο $\bar{x} \in A \setminus B$ όπου $B \subset A$ και B έχει μηδενικό περιεχόμενο.

Π.χ. συνόλου μηδ. περιεχομένου ή μέτρου.

(α) $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ έχει n-διάστατο μηδ. περιεχόμενο κ' μέτρο
(β) Κάθε μονοσύνολο $\{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ έχει μηδ. περιεχόμενο αφού αν $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ισχύει $\{\bar{x}\} \subset [x_1, x_1 + (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{n}}] \times \ldots = U$
με $v(U) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ⟹ πεπερασμένο πλήθος από σημεία έχει μηδ. περιεχόμενο
⟹ αριθμήσιμο πλήθος από σημεία έχει μηδ. μέτρο.

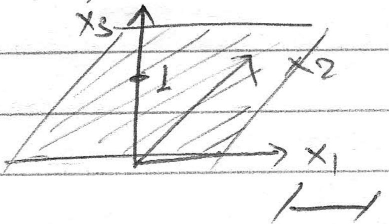
505 (γ) Κάθε ευθεία παράλληλη σε κάποιον άξονα του $\mathbb{R}^2$
Κάθε επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ παράλληλο σε κάποιο επίπεδο

xy, xz, yz και γενικότερα κάθε υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ της ειδικής μορφής $H=\{\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=c\}$ για κάποιο $i=1,\dots,n$ και κάποιο $c\in\mathbb{R}$ (π.χ. για $n=2$ έχουμε την ευθεία $H=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1=c\}$



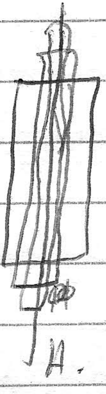
$\rightarrow$ 2-διάστατο μηδ. περιεχ.

και αν $n=3$ έχουμε το επίπεδο $H=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_3=1\}$) έχουν n-διάστατο μηδενικό μέτρο και κάθε φραγμένο υποσύνολό τους π.χ. ένα ευθ. τμήμα για $n=2$ έχει μηδενικό περιεχόμενο.



Πράγματι, έστω $\varepsilon>0$ και $U_k=[-k,k]\times\dots\times\underbrace{[-k,k]}_{(i-1)\text{-θέση}}\times\underbrace{\left[c-\frac{\varepsilon}{2^{k+2}(2k)^{n-1}},\ c+\frac{\varepsilon}{2^{k+2}(2k)^{n-1}}\right]}_{i\text{-θέση}}\times\underbrace{[-k,k]}_{(i+1)\text{-θέση}}\times\dots\times\underbrace{[-k,k]}_{n\text{-θέση}}$, $k\in\mathbb{N}$.

τότε $H\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_k$ και $\sum_{i=1}^{\infty}v(U_k)=\sum(2k)^{n-1}\frac{2\varepsilon}{2^{k+2}(2k)^{n-1}}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$



Άσκηση: Ν.δ.ο. αν $A\subset H$ φραγμένο τότε A έχει μηδενικό περιεχόμενο.